



## کاربردهای تقارن محوری و مرکزی

### مطلبی برای افزایش دانش موضوعی ریاضی معلمان

#### مقدمه

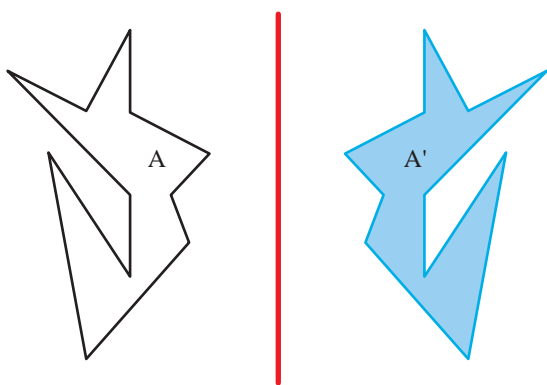
بازتاب منظره‌ها در آب، یا تشکیل تصویر در آینه، نمونه‌هایی از **تقارن محوری** هستند. تقارن محوری یکی از انواع تغییراتی است که می‌توان روی شکل‌ها در یک **صفحه** انجام داد. **تقارن مرکزی** نیز یک نوع دیگر تقارن است که با دوران‌ها ارتباط دارد. به این تغییرات در هندسه **تبدیل** گفته می‌شود. وقتی روی یک شکل، یک یا چند تبدیل پشت سر هم اثر می‌کند، نوع شکل تغییری نمی‌کند، ولی مکان یا وضعیت شکل تغییر می‌کند. در این شماره از مجله، با تقارن محوری و تقارن مرکزی آشنا می‌شویم و کاربردهای آن را در کاشی‌کاری ایرانی - اسلامی خواهیم دید.

در کتاب‌های درسی ریاضی دوره‌ی ابتدایی موضوع‌هایی هستند که یا دانش‌آموزان در یادگیری آن‌ها مشکل دارند یا آموزگاران در یاددهی آن‌ها. یکی از این موضوعات، تقارن‌ها و دوران در هندسه است. «تقارن و دوران» حالت خاصی از تغییر دادن یک شکل در صفحه است. این تغییر دادن‌ها را «تبدیل هندسی» می‌نامند. در این مطلب قصد داریم تقارن و دوران را به عنوان یک موضوع یا مفهوم ریاضی، به گونه‌ای متفاوت، بررسی کنیم تا آموزگاران دانش موضوعی خود را برای تدریس بهتر افزایش دهند. همچنین، مطالبی درباره‌ی تدریس این موضوعات بیان خواهیم کرد.



تصویر ۱. شکل نارنجی، قرینه‌ی شکل قرمز روی صفحه است

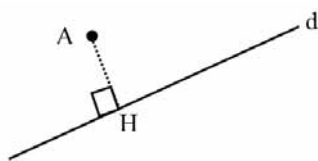
موضوع مهم دیگر این است که در بازتاب، یک جهت کاملاً برعکس می‌شود؛ مثلاً در آینه، دست چپ و راست تصویر شما برعکس آنچه در واقعیت است می‌شود. در حالت کلی نیز در تقارن محوری، آن جهتی که بر محور تقارن عمود است، برعکس می‌شود. انگار شکلتان پشت و رو شده باشد.



تصویر ۲. قرینه‌ی یک نقطه نسبت به خط

### فاصله‌ی یک نقطه تا یک خط در صفحه

نقطه‌ی  $A$  را در نظر بگیرید. فاصله‌ی آن را تا خط  $d$  می‌خواهیم. از  $A$  یک پاره‌خط به خط  $d$  عمود کنید. این پاره‌خط کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که یک سرش  $A$  و سر دیگرش روی خط  $d$  است. اندازه‌ی طول این پاره‌خط، فاصله‌ی نقطه تا خط است.

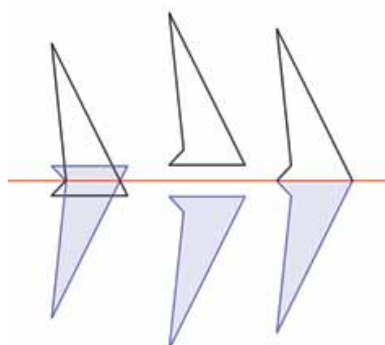


طول  $AH$  فاصله‌ی نقطه‌ی  $A$  تا خط  $d$  است.

### تقارن محوری چیست؟

یک خط را در صفحه در نظر بگیرید. اگر یک شکل در آن صفحه را نسبت به آن خط بازتاب دهیم، تصویر به دست آمده، شکلی است که با شکل اولیه هم‌نهشت است، ولی انگار پشت و رو شده است. به شکل به دست آمده **قرینه‌ی شکل اصلی** می‌گویند و به خطی که بازتاب را نسبت به آن انجام داده‌ایم، **محور تقارن** (یا خط تقارن) گفته می‌شود.

در تصویر ۲، چند نمونه‌ی دیگر از تقارن محوری و شکل‌های قرینه را می‌بینید:

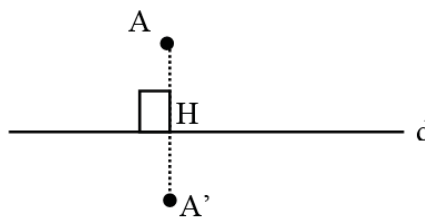


تصویر ۲. در هر مورد، شکل سفید قرینه‌ی شکل آبی نسبت به خط قرمز روی صفحه است

می‌بینید که اگر خط تقارن شکل را قطع کرده باشد، شکل و قرینه‌اش با هم تداخل خواهند داشت (شکل سمت چپ در تصویر ۲).

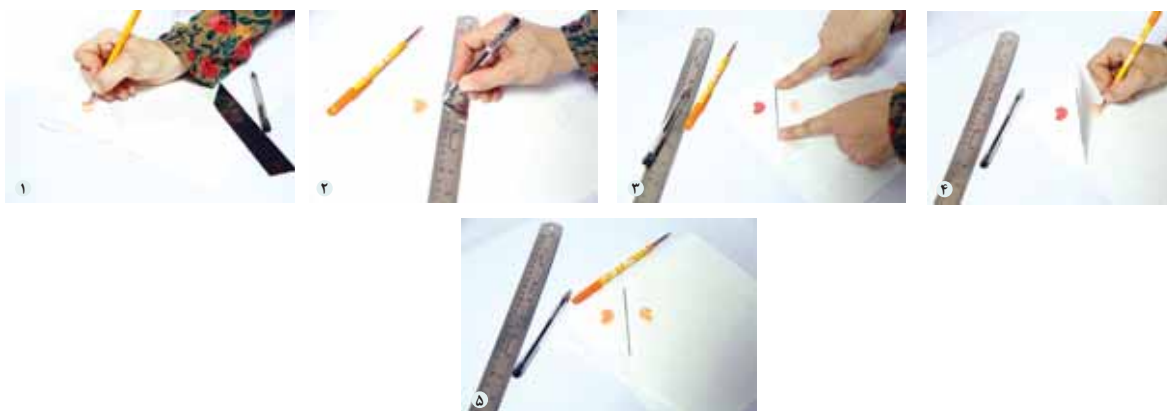
بگذارید دقیق‌تر ببینیم در بازتاب شکل نسبت به یک خط چه اتفاقی می‌افتد؟ وقتی شکلی بازتاب پیدا می‌کند، هر نقطه از شکل و نقطه‌ی متناظر آن در قرینه، تا خط بازتاب فاصله‌های یکسان دارند. این موضوع در واقع قانون بازتاب است که در آینه نیز رخ می‌دهد. هر چه از آینه دور می‌شوید، تصویر شما در آینه نیز دورتر می‌شود و هر چه به آینه نزدیک می‌شوید، تصویر نیز نزدیک‌تر می‌آید.

پس برای اینکه قرینه‌ی یک نقطه مانند  $A$  را نسبت به خط راستی مانند  $d$  به دست بیاوریم، ابتدا از  $A$  پاره‌خط  $AH$  را بر  $d$  عمود می‌کنیم (مثلاً با گونیا). سپس  $A'H$  را هم اندازه‌ی  $AH$  و با امتداد دادن آن رسم می‌کنیم.  $A'$  قرینه‌ی  $A$  نسبت به خط  $d$  است (تصویر ۳).

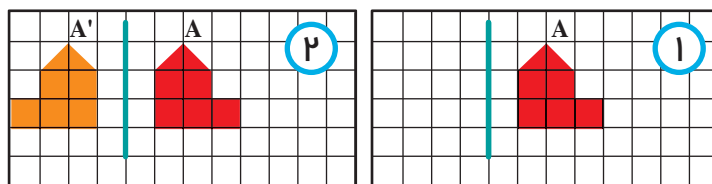


### چگونه شکلی را در صفحه نسبت به یک خط راست تقارن دهیم؟

**الف) با استفاده از کاغذ پوستی:** کاغذ پوستی را روی صفحه بیندازید. شکل و خط تقارن را با دقت روی آن کپی کنید. کاغذ پوستی را که یک نسخه از شکل شما روی آن است، از روی خط تقارن تا کنید. تصویر شکل را روی آن لای کاغذ که شکلتان رویش نیست، کپی کنید. تای کاغذ را باز کنید تا ببینید که شکل نسبت به خط مورد نظر قرینه شده است.



**ب) با استفاده از صفحه‌ی شطرنجی:** صفحه‌ی شطرنجی صفحه‌ای است که با خانه‌های مربع شکل هم‌اندازه پوشیده شده است. اگر امتداد خط تقارن با یکی از امتدادهای افقی یا عمودی صفحه‌ی شطرنجی یکی باشد، و اگر یک شکل روی صفحه‌ی شطرنجی قرار داشته باشد، فاصله‌ی نقطه‌های مختلف آن نسبت به خط را می‌توان با شمردن این چهارخانه‌ها مشخص کرد. مثلاً در تصویر ۴، نقطه‌ی A دو خانه با خط فاصله دارد. به این ترتیب، برای قرینه کردن یک شکل نسبت به خط روی صفحه‌ی شطرنجی، کافی است یک نقطه از آن شکل (مانند A) را قرینه کنید و نقطه‌ی A' را به دست آورید و سپس سایر نقاط شکل را در مکان جدید، منتها با وضعیت درست برعکس آنچه نسبت به A داشته‌اند، نسبت به نقطه‌ی A' رسم کنید.



تصویر ۴. تغییر جهت‌ها در تقارن محوری: آنچه در قسمت بالای شکل است، در قرینه هم بالاست، ولی آنچه در شکل در سمت راست شکل است، در قرینه سمت چپ است.

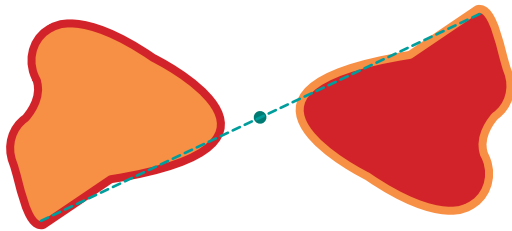
### گاهی یک شکل ویژگی‌هایی دارد که با استفاده از آن‌ها تقارن شکل راحت‌تر انجام می‌شود. برای نمونه:

- برای تقارن یک پاره‌خط، کافی است تنها دو نقطه‌ی دو سر پاره‌خط را قرینه کنیم. بعد آن دو نقطه‌ی جدید را به هم وصل کنیم. پاره‌خطی که به دست می‌آید، قرینه‌ی پاره‌خط اولیه است.
- برای تقارن یک چندضلعی، که در واقع از چند پاره‌خط تشکیل شده، کافی است تنها رأس‌های چندضلعی را قرینه کنیم، سپس این نقطه‌های جدید را به ترتیب به هم وصل کنیم. چندضلعی به دست آمده قرینه‌ی چندضلعی اولیه است.
- برای انتقال یک دایره، کافی است مرکز دایره را قرینه کنیم. سپس به شعاع دایره‌ی اصلی و به مرکز جدید، دایره‌ی بزینیم. این دایره قرینه‌ی دایره‌ی اصلی است. ولی به این موضوع توجه کنید که اگر نقطه‌های دایره به طریقی از هم متمایز شده بودند، مثلاً با رنگ آمیزی، می‌دیدید که جهت دایره برعکس شده است. شما این فهرست را با شکل‌های دیگری که می‌شناسید، کامل کنید.

هندسه جزء جدانشدنی برنامه‌ی درسی ریاضیات در همه‌ی کشورهاست. منتها آموزش هندسه رویکردهای متفاوتی دارد که موضوع بحث این مطلب نیست. در برنامه‌ی درسی ملی ایران نیز هندسه و اندازه‌گیری یکی از مفاهیم قلمرو حوزه‌ی ریاضیات است. در هندسه دانش‌آموزان علاوه بر آشنایی با شکل‌های مهم و شناخت ویژگی‌های آن‌ها، با ارتباط بین این شکل‌ها و موضوع‌هایی که به اندازه و اندازه‌گیری ارتباط دارند نیز آشنایی شوند. از همه مهم‌تر، هندسه بستر بسیار خوبی برای آشنایی و تمرین روی استدلال است. منتها رویکرد آموزشی جدید به استدلال، کاملاً با رویکردهای سنتی متفاوت است و به جای تعدد قضیه‌ها و نتایج، بر فرایند تفکر استدلالی تمرکز می‌کند.

### تقارن مرکزی چیست؟

یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید. اگر یک شکل در آن صفحه را نسبت به آن خط  $180^\circ$  درجه دوران دهیم، تصویر به دست آمده، شکلی است که با شکل اولیه هم‌نهشت است، ولی انگار سر و ته شده است.



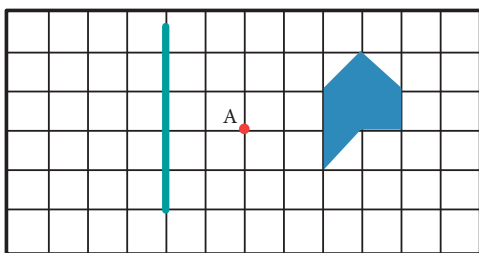
تصویر ۵. شکل نارنجی قرینه‌ی شکل قرمز روی صفحه است

به شکل به دست آمده، **قرینه‌ی مرکزی** شکل اصلی می‌گویند و به نقطه‌ای که دوران را نسبت به آن انجام داده‌ایم، مرکز تقارن می‌گویند. از آنجا که زاویه‌ی  $180^\circ$  درجه یک خط راست است، برای تقارن مرکزی، در واقع هر نقطه از شکل را به نقطه‌ی مورد نظر وصل می‌کنیم و به همان اندازه ادامه می‌دهیم تا نقطه‌ی متناظر در شکل قرینه به دست آید.

### چگونه شکلی را در صفحه

#### نسبت به یک نقطه تقارن دهیم؟

مانند تقارن محوری، هم با استفاده از **کاغذ پوستی** و هم با استفاده از **کاغذ شطرنجی** می‌توانیم قرینه‌ی یک شکل را نسبت به یک نقطه در آن صفحه به دست بیاوریم. آیا می‌توانید مراحل کار را در هر روش بیان کنید؟ شکل مقابل را در صفحه‌ی شطرنجی نسبت به نقطه‌ی A قرینه کنید.



تصویر ۶. مراحل تقارن یک شکل نسبت به یک نقطه روی صفحه‌ی شطرنجی

درست مانند انتقال و تقارن محوری، گاهی شکلی ویژگی‌هایی دارد که با استفاده از آن‌ها، تقارن شکل نسبت به یک نقطه نیز راحت‌تر انجام می‌شود. برای نمونه:

- برای به دست آوردن تقارن یک پاره‌خط، کافی است تنها دو نقطه‌ی دو سر پاره‌خط را قرینه کنیم. بعد، آن دو نقطه‌ی جدید را به هم وصل کنیم. پاره‌خطی که به دست می‌آید، قرینه‌ی پاره‌خط اولیه است. شما این فهرست را با شکل‌های دیگری که می‌شناسید کامل کنید.

### شکل‌های متقارن

شکل‌های زیر را ببینید. نظمی در آن‌ها به چشممان می‌خورد که از جنس تقارن است: یک نیمه‌ی شکل درست مانند نیمه‌ی دیگر است؛ منتها یا پشت و رو شده‌ی آن است، یا سر و ته شده‌ی آن! در هندسه می‌گوییم این شکل‌ها متقارن هستند.

تصویر ۷ تقارن محوری دارد و **محور تقارن** آن در شکل مشخص شده است. یعنی اگر شکل را از روی آن خط تا کنیم، دو نیمه‌ی شکل کاملاً بر هم منطبق می‌شوند. تصویر ۸ تقارن مرکزی دارد؛ یعنی اگر شکل را دور نقطه‌ای که مشخص شده است  $180^\circ$  درجه بچرخانیم، شکل دوباره بر خودش منطبق می‌شود. این نقطه، **مرکز تقارن** شکل متقارن است.



کاشی‌کاری مسجد امام بروجرود / عکاس: حامد ترابی گودرزی

بعضی شکل‌ها مرکز تقارن دارند (یعنی شکل تقارن مرکزی دارد، مانند دایره، بیضی و مربع)، بعضی شکل‌ها نه! (مانند دوزنقه یا مثلث). بعضی شکل‌ها محور تقارن دارند (یعنی شکل تقارن محوری دارد، مانند دایره یا مستطیل یا مثلث متساوی‌الساقین)، بعضی شکل‌ها نه! (مانند متوازی‌الاضلاع یا مثلث مختلف‌الاضلاع). در تصویر ۹ شکل‌های متقارن را تعیین کنید و مرکز تقارن یا محور تقارن آن‌ها را بیابید. همان‌طور که می‌بینید، بعضی از شکل‌های متقارن، بیش از یک محور تقارن دارند، ولی قطعاً نمی‌شود شکلی دو مرکز تقارن داشته باشد.

### تقارن در چندضلعی‌ها







در جدول زیر، تقارن‌های چندضلعی‌های معروف را می‌بینید.

تصویر ۹. موزه ملی ملک / عکاس: ابراهیم سیسان



تقارن مرکزی	تعداد محور تقارن	شکل	
ندارد	۰		دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه
ندارد	۱		دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین
دارد	۰		متوازی‌الاضلاع
دارد	۲		مستطیل
دارد	۲		لوزی
دارد	۴		مربع
ندارد	۳		مثلث متساوی‌الاضلاع
ندارد	۱		مثلث متساوی‌الساقین

جدول زیر تقارن‌های چندضلعی‌های منتظم را نشان می‌دهد:

تقارن مرکزی	تعداد محور تقارن	شکل	تقارن مرکزی	تعداد محور تقارن	شکل
ندارد	۷		ندارد	۳	
دارد	۸		دارد	۴	
...	...	...	ندارد	۵	
دارد	$n$		$n$ زوج باشد	۶	
ندارد			$n$ فرد باشد		

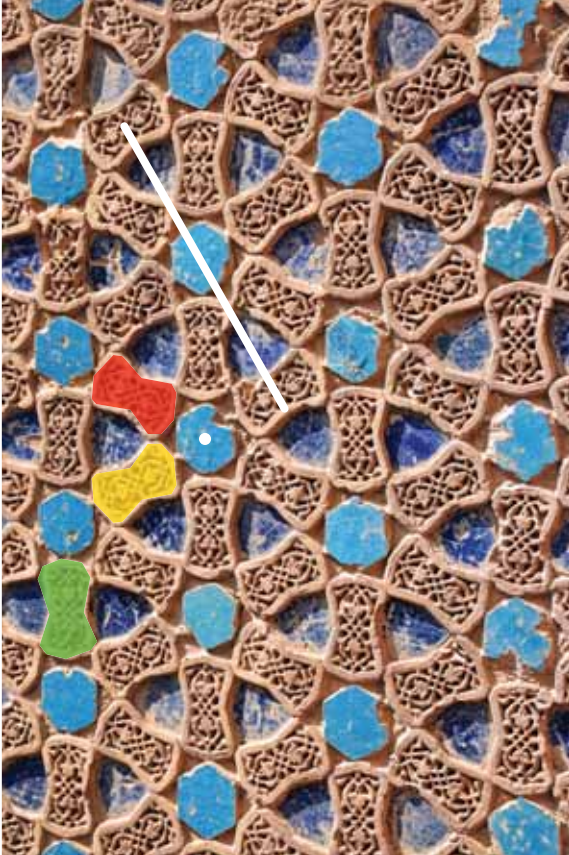
### تقارن در کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی

در کتاب‌های درسی ابتدایی، تقارن محوری و تقارن مرکزی، بخش‌هایی از فصلی مشخص را در کتاب درسی پایه‌ی پنجم به خود اختصاص داده است. همچنین، یک بخش از کتاب پایه‌ی ششم به موضوع مرکز تقارن اختصاص داده شده و البته ردپای آن‌ها را در بعضی قسمت‌های کتاب‌های درسی ریاضی شش پایه می‌توان دید. خوب است معلمان توجه دانش‌آموزان را به وجود تقارن در شکل‌های کتاب درسی جلب کنند.

پایه	صفحه‌ی کتاب	موضوع و شرح آن
اول	۱ و ۳ و ۵۰ و ۹۱ و ۱۰۴ و ۱۰۹ و ۱۱۷ و ۱۲۵ و ۱۳۲ و ۱۳۹ و ۱۴۸ و ۱۶۲ و ۱۶۵ و ۱۷۵	تصویرهایی از شکل‌های متقارن (عمدتاً با تقارن محوری و چند شکل تا با تقارن مرکزی) مانند تصویرهای کاشیکاری ص ۵۰؛ و شکل‌های نامتقارن
	۶۸ و ۸۹ و ۹۸ و ...	خط‌های تقارن در شکل‌ها
دوم	۲ و ۱۵ و ۴۲ و ۴۷ و ۴۸ و ۵۱ و ۵۲ و ۵۴ و ۶۶	در این صفحه‌ها شکل‌هایی هست که متقارن هستند و دانش‌آموز از نظر بصری با تقارن مواجه می‌شود؛ مانند شکل سمت راست قرمز رنگ (کار در کلاس). شکل سؤال ۵ ص ۱۵ (هم تقارن مرکزی و هم تقارن محوری دارد). تصویر نام محمد در ص ۴۲ تقارن مرکزی دارد.
	فصل ۳	هم شکل‌های متقارن هست و هم شکل‌های نامتقارن
	۱۱۱ و ۱۱۲	خط‌های تقارن در تقسیم‌بندی شکل‌ها به قسمت‌های مساوی، برای نشان دادن کسرها
	۱۱۵ و ۱۱۹	رنگ‌آمیزی متقارن و نامتقارن تصویرها
سوم	۷ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۳ و ۴۷ و ۴۸ و ۵۲ و ۵۳ و ۵۴ و ۵۹ و ۶۱ و ۶۵ و ۷۴ و ...	در بعضی از تصویرهای این صفحه‌ها وجود تقارن یا نبود آن به چشم می‌آید؛ مانند تقارن محوری در الگوهای متقارن ص ۱۹ یا نقش تقارن در کار با فیچجی ص ۲۳.
	۷۲	مشاهده‌ی تقارن در عددهای جدول ضرب
چهارم	۲۷ و ۴۱ و ۱۱۹ و ۱۲۹	در بعضی از تصویرهای این صفحه‌ها وجود تقارن یا نبود آن به چشم می‌آید.
	۱۴ تا ۱۹ و ۴۶ و ۵۰	در بعضی از تصویرهای این صفحه‌ها وجود تقارن یا نبود آن به چشم می‌آید.
پنجم	۲۰	معما و سرگرمی درباره‌ی خط تقارن و شکل‌های متقارن
	فصل ۴	تقارن و چندضلعی‌ها شامل تقارن محوری و تقارن مرکزی
ششم	فصل ۴	تقارن و مختصات شامل مرکز تقارن و محور تقارن

اگر باز هم در این کتاب‌ها موضوع یا تصویر مرتبط با تقارن وجود دارد که در جدول ما نیامده است، شما جدول را کامل کنید. توجه کنید که «دوران» یا چرخش نیز یک تبدیل هندسی دیگر در صفحه است که در کتاب ریاضی پایه‌ی ششم معرفی شده است و باز هم تصویرهایی از شکل‌هایی که تقارن چرخشی دارند، در کتاب‌های ریاضی دیگر پایه‌ها دیده می‌شود.

## مسئله



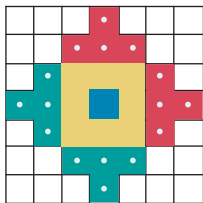
تصویر مربوط به مسئله‌های ۱ تا ۴ - مسجد جامع نطنز / عکاس: آوا نقوی  
۶. آیا این تصویر تقارن مرکزی دارد؟ مرکز تقارن آن را مشخص کنید.



تصویر مربوط به مسئله‌ی ۶ - مسجد جامع ورامین / عکاس: غلامرضا بهرامی



تصویر مربوط به مسئله‌ی ۵ - مسجد جامع ورامین / عکاس: غلامرضا بهرامی



تصویر مربوط به مسئله‌ی ۷

۷. آیا تصویر مقابل با در نظر گرفتن رنگ آمیزی‌اش، محور تقارن دارد؟ اگر پاسخ مثبت است، خط تقارن را مشخص کنید و اگر پاسخ منفی است، با تغییر رنگ کدام خانه‌ها شکل متقارن می‌شود؟ سعی کنید کمترین تعداد تغییر را بدهید.

### منبع

۱. درباره‌ی هندسه بیشتر بدانیم. کتاب دانش‌افزایی موضوعی برای معلم. نوشته‌ی زهره پندی، فائزه شیخ‌علیان، مهدخت نقیبی بیدختی. انتشارات مدرسه‌ی برهان. در دست انتشار.



برای دریافت فایل پاسخ مسئله‌ها،  
بارکد مقابل را اسکن کنید.

در ریاضیات مدرسه‌ای، فعالیت‌های آموزشی باید از ریاضیات محیط پیرامون برخاسته باشد و به دانش‌آموزان کمک کند مفاهیم و گزاره‌های ریاضی را در محیط پیرامونی خود مشاهده، تجزیه، تحلیل و درک کنند و برای مفاهیم ریاضی در محیط پیرامونی تعبیرهای گوناگون به دست آورند (برنامه‌ی درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، ص ۱۳۴).